Teoretická část - 17.1.2022

1. (a) Definujte bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci (2 body).

   (b) Definujte stejně omezenou, klesající a nerostoucí posloupnost (1, 5 bodu).

   (c) Pro každou z níže uvedených podmínek nalezněte posloupnost $\{a_n\}$ funkcí definovaných na $\mathbb{R}$, pro kterou daná podmínka platí.

      i. Platí $a_n \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na $\mathbb{R}$, ale neplatí $a_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$.

      ii. Platí $\{a_n\} \subset \mathcal{N}(\mathbb{R})$, $a_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$ a
      $$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{N}) \int_{-\infty}^{\infty} a_n > 0.$$

      iii. Posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí, platí $a_n \to 0$ na $\mathbb{R}$, ale neplatí $a_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$

      iv. Posloupnost $\{a_n\}$ je klesající a platí $a_n \rightrightarrows \operatorname{sgn} x$ na $\mathbb{R}$.

      v. Existuje $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, že $a_n \rightrightarrows a$ na $\mathbb{R}$, ale $\{a_n\}$ není stejně omezená na $\mathbb{R}$.

   Vše řádně zdůvodněte (4, 5 bodu).

2. (a) Definujte stacionární bod, Jacobiho rovnici a konjugovaný bod ($2,5$ bodu).

   (b) Zformulujte větu o Lagrangeových multiplikátorech a Jacobiho větu ($2,5$ bodu).

   (c) Větu o Lagrangeových multiplikátorech dokažte (2 body).

   (d) Rozhodněte o platnosti níže uvedených tvrzení pro Banachův prostor $(X, ||\cdot||)$ a funkcionály $F, G : X \to \mathbb{R}$.

      i. Je-li $x \in X$ stacionární bod F i G, potom je x stacionátní bod $F + G$.

      ii. Je-li $x \in X$ stacionární bod F i G, potom je x stacionátní bod $F \cdot G$.

   Vše řádně zdůvodněte (1 bod).

3. (a) Definujte ortogonální, ortonormální a úplnou množinu a abstraktní Fourierovu řadu (3 body).

   (b) Zfromulujte a dokažte

      i. větu o nejlepší aproximaci,

      ii. větu o Besselově nerovnosti a Parsevalově rovnosti

      $(3,5$ bodu).

   (c) Rozhodněte o platnosti níže uvedených tvrzení pro Hilbertův prostor H a dvě jeho úplné ortonormální množiny

$$P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{a} \quad Q = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

      i. Množina $P \cup Q$ je ortogonální.

      ii. Množina $P \cap Q$ je ortogonální.

      iii. Množina $P \cup Q$ je úplná.

      iv. Množina $P \cap Q$ je úplná.

      Vše řádně zdůvodněte $(1,5$ bodu).